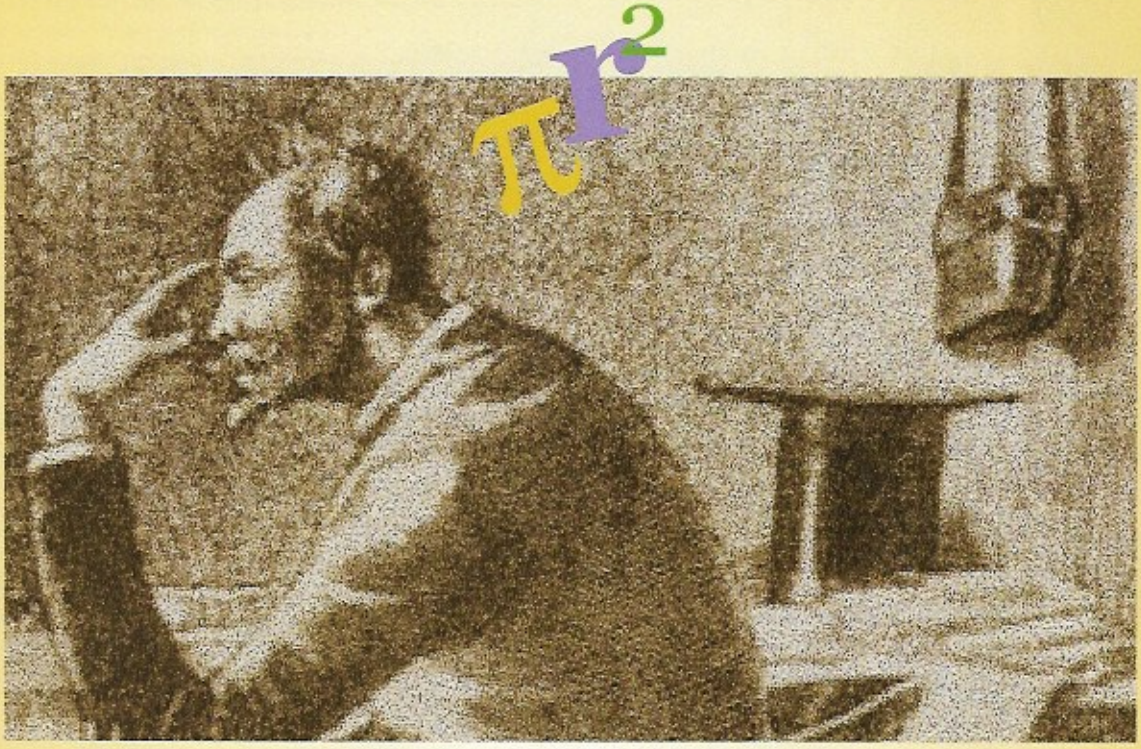
Quadrature

Magazine de mathématiques pures et épicées

La mathématique ouvre plus d'une fenêtre sur plus d'un monde



- Mots, maths et histoire
- Du nouveau du côté des nombres ?
- Albert Badoureau (1853–1923)
- Notes de lecture
- Quelques inégalités...
- Zéro puissance zéro
- Apollonios et les singularités
- Coin des problèmes
- Prononcer les nombres

n° 66

Magazine trimestriel

Octobre–Décembre 2007

ISSN 1142-2785 – 8 Euros

EDP SCIENCES

Du nouveau du côté des nombres ?

par Claude P. Bruter*

I Introduction

La modélisation de problèmes de la vie courante sous la forme d'équations polynomiales à résoudre a été un facteur essentiel du développement des mathématiques.

C'est bien en définitive le problème de la résolution de telles équations qui a conduit à la création des nombres classiques, puis à celles de la théorie des groupes et de l'algèbre moderne.

Par ailleurs les polynômes ont une importance déterminante dans l'univers mathématique en tant qu'instruments calculables d'approximation des fonctions. Se pose toujours à l'heure actuelle la question de la connaissance effective, numérique, pratique des racines d'un polynôme. Des progrès notables dans cette direction ont été accomplis par Shub et Smale (médaille Fields), plus récemment par Kalantari.

Le contenu de cet article se situe dans la lignée de ces travaux. Il propose le principe d'un algorithme d'obtention des racines d'un polynôme standard. Il convient d'examiner les rapports entre cet algorithme et celui de Kalantari, l'enrichissement qu'il peut apporter. Il s'agit par exemple d'explorer les domaines de données pour lesquels la convergence vers telle ou telle racine s'accomplit, les propriétés de ces domaines, les rapidités de convergence.

De tels domaines sont mis à jour par l'algorithme de Kalantari et donnent lieu à des visualisations souvent très esthétiques. Ce stade n'a pas encore pu être atteint par l'usage de l'algorithme proposé.

Mais ce n'est pas dans ce domaine de l'algorithmique que se situe, à mon sens, l'intérêt principal de l'article. Il se trouve dans la manière géométrique, par ailleurs facile d'accès, de comprendre les nombres d'une part, un point de vue qui, d'autre part, débouche sur un élargissement du domaine attaché au concept de nombre, et par conséquent sur un accroissement vraisemblable de l'étendue du champ mathématique, analogue, toute proportion gardée, à ce qu'il advient quand on passe par exemple de la dimension 2 à la dimension 3.

Naturellement, je peux me faire des illusions. Peut-être un lecteur assidu parviendra-t-il par de bons arguments à les dissiper ?

II Extensions du concept de nombre usuel

II.1 Le concept usuel

Du point de vue statique, un nombre a la signification d'abord d'une *présence spatiale* [2], d'un ordre ou d'une cardinalité déterminés. Du point de vue géométrique et dynamique, un tel nombre représente le mouvement appelé une similitude sur un espace euclidien. Une similitude est la composition d'une translation qui peut être entendue comme une dilatation, terme à la signification physique que je préfère à celui d'homothétie, et d'une rotation. L'importance des similitudes est exprimée par le théorème d'Aristote-Liouville selon lequel tout mouvement est le résultat de la composition de similitudes locales.

Alors que les rotations r sont souvent évaluées par des angles, les dilatations effectives sont évaluées par des nombres réels non négatifs μ, formant l'ensemble noté $\mathbf{P}$ – la construction de cet ensemble, tout comme celui des nombres naturels, puis celui des entiers, puis celui des rationnels, peut s'établir de manière constructive, par un processus d'extension faisant appel à des polynômes [1].

Définition 1. μ sera appelé un *module*.

Un nombre réel traditionnel v est un élément de l'ensemble $\Sigma = \mathbf{P} \times \mathbf{SO(1)}$: le groupe $\mathbf{SO(1)}$ des rotations positives r sur l'espace euclidien à une dimension possède seulement deux éléments qui peuvent

* bruter@univ-paris12.fr

être désignés par 0 et π (angles), ou par -1 et $+1$, qui sont les deux points Π_1 et Π_2 de la 0-sphere $\mathbf{S}^0$. De la sorte, v peut être représenté par l'un de ces trois symbolismes :

- 1 : (μ, r) où $\mu \in \mathbf{P}$, $r \in$ **SO(1)**,
- 2 : $r\mu$ avec la convention que $r\mu = +\mu = \mu$ si r est l'identité, $r\mu = -\mu$ si r n'est pas l'identité,
- 3 : (μ, Π) où $\mu \in \mathbf{P}$, $\Pi \in \mathbf{S}^0$.

L'emploi du second symbolisme conduit à la notation $\mathbb{R}$ pour l'ensemble des nombres dits réels. $\mathbb{R}$ possède la structure d'un corps, d'un espace vectoriel uni-dimensionnel. Les commutativité et symétrie dans $\mathbb{R}$ proviennent des mêmes propriétés respectivement dans **P** et dans **SO(1)**.

Ces symbolismes suggèrent d'étendre le concept habituel de nombre réel.

II.2 Les espaces vectoriels *n*-dimensionnels en tant que *n*-corps d'homothétie

$\mathbb{K}$ désignant un corps, $\mathbb{K}^n$ est en général vu comme un espace vectoriel n-dimensionnel $\mathbf{V}^n$. Du point de vue de la sémantique physique, un vecteur d'un tel espace doit être d'abord interprété comme la *représentation* d'une force. Du point de vue de la sémantique numérique, un tel vecteur n'est qu'une liste de n nombres uni-dimensionnels.

Étant donné un scalaire $k \in \mathbb{K}$ et un vecteur $\boldsymbol{v}$, $k\boldsymbol{v}$ est bien défini comme le vecteur $(kv_1, \ldots, kv_n)$: $\mathbb{K}$ opère uniformément sur chaque composante de $\boldsymbol{v}$.

Du point de vue de la sémantique physique encore, l'action extérieure de k sur v doit être comprise comme une *dilatation algébrique* (ou homothétie).

Il s'agit là d'une contrainte forte qui mérite d'être levée : il n'y a pas *a priori* de raison physique imposant que chaque composante soit dilatée de la même façon par une action extérieure sur l'espace vectoriel. Par opposition à la dilatation précédente linéaire et uniforme et selon ce point de vue plus général, une telle action transforme v dans le vecteur $w = (k_1v_1, \ldots, k_nv_n) = k(v) = kv$: k est maintenant un vecteur de $\mathbf{V}^n$, il opère sur $\mathbf{V}^n$ en tant que dilatation linéaire générale.

Définition 2. *kv sera appelé le produit commutatif trivial, ou peut-être mieux, le produit homothétique des deux vecteurs k et v.*

Ainsi $\mathbf{V} = \mathbb{K}^n$ est maintenant muni des deux lois usuelles : la loi d'addition d'une part, qui fait de **V** un groupe commutatif, et celle de multiplication d'autre part. Cette opération admet presque partout une inverse : w et k étant donnés, chaque composante v_i de v est définie dès que $k_i \neq 0$.

Posons $\mathbb{K}_i^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \ldots \mathbb{K} \times \{0_i\} \times \mathbb{K} \times \ldots \mathbb{K}$, alors $\mathbb{K}^n - \cup_i \mathbb{K}_i^n$ a la structure de groupe pour la multiplication.

Définition 3. $\mathbb{K}^n$ muni de l'addition et de la multiplication de ses éléments comme il vient d'être défini sera appelé un *n-corps d'homothétie*. $\mathbb{K}$ est ainsi un 1-corps d'homothétie ou plus traditionnellement un corps. Les éléments de $\mathbb{K}^n$ seront alors compris comme des *nombres n-dimensionnels* sur $\mathbb{K}$.

Remarque. Dans cette définition, $\mathbb{K}^n$ est muni de sa base canonique. La donnée la plus intrinsèque qui caractérise v est son module μ puisque tout changement de base ne modifie pas le module de v mais les valeurs de ses composantes. Les valeurs des composantes de la somme et de la multiplication de deux vecteurs dépendent du choix de la base. Si naturellement k n'est pas le vecteur nul, un changement de base peut altérer ses composantes de manière qu'aucune d'entre elles ne soit nulle : alors la division de w par k est toujours possible mais le résultat dépend de la base qui a été choisie.

Voici un exemple très simple, illustré par la figure 1.

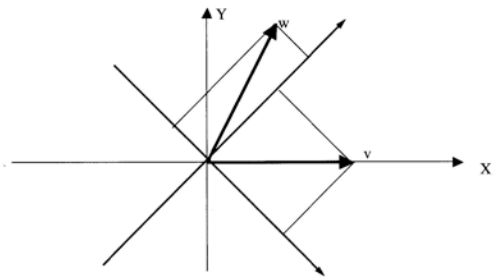


Figure 1. Conséquences numériques d'un changement de base.

Dans le repère OXY, w est le vecteur de composantes (1, 2) alors que v est le vecteur de composantes (2, 0) : la division de w par v est impossible. On fait pivoter le repère initial d'un angle de 45 degrés : w et v ayant alors respectivement pour composantes $\left(\frac{-1}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ et $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, la division de w par v est devenue possible.

Dans la suite, $\mathbf{V}^n$ sera muni de sa base naturelle.

II.3 Espaces vectoriels *n*-dimensionnels en tant que *n*-corps angulaires et *n*-corps de similitude

Commençons par le cas bien connu d'un nombre deux-dimensionnel :

$$v = (x, y) \quad \text{(voir la figure 2).}$$

On peut interpréter v comme le résultat d'une similitude s opérant sur $e_1 = (1,0)$: son module est $\mu = [x^2 + y^2]^{1/2}$.

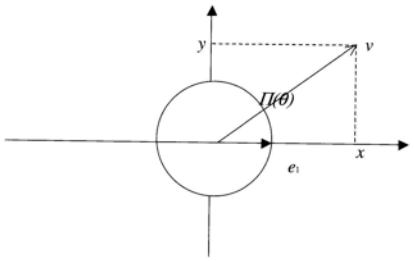


Figure 2. Éléments de représentation d'un vecteur.

On dispose de plusieurs façons de noter la rotation r de e_1 associée à la similitude s :

1) r peut être ici représentée par un point $\Pi(\theta)$ sur la 1-sphere $\mathbf{S}^1$, point qui peut être appelé l'*affixe* de la rotation.

2) θ peut représenter une longueur euclidienne d'arc adéquat sur cette sphère de sorte que

$$x = \mu \cos\theta, \quad y = \mu \sin\theta.$$

La similitude peut alors être notée (μ, θ), et $(\mu, \theta)\, e_1$, ou plus simplement (μ, θ), est également une représentation de v.

Définition 4. θ sera appelé l'*angle* ou l'*argument* de v, et (μ, θ) sera appelé la *représentation* ou le *nombre de* (*Bernoulli-*)*Euler* associé à v.

Posant $e_2 = (1, \pi/2)\, e_1$, $v = x\, e_1 + y\, e_2$ est la représentation vectorielle usuelle de v.

3) r est conçu comme un élément de **SO(2)**, lequel est compris comme un groupe multiplicatif, alors que $\mathbf{S}^1$ est vu comme un groupe de Lie additif. Puisque l'application $\rho : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{SO(2)}$ est un homomorphisme tel que $\rho(0) = 1$, $\rho(\pi) = -1$, $\rho(\mathrm{a} + \mathrm{b}) = \rho(\mathrm{a})\,\rho(\mathrm{b})$, alors $\rho(\pi/2) = [-1]^{1/2} = i$: ce symbole[1] *i représente une rotation* d'angle $\pi/2$ ou encore la matrice $\begin{bmatrix} \cos\pi/2 & \sin\pi/2 \\ -\sin\pi/2 & \cos\pi/2 \end{bmatrix}$ de sorte que $\rho(\pi/2)\, e_1 = i\, e_1 = e_2$.

[1] La représentation symbolique de la rotation ρ est donc telle que $\rho(0) = 1$, $\rho(\pi) = -1$: ici 1 et -1 sont des symboles que l'on ne doit pas confondre *a priori* avec les quantités numériques correspondantes puisqu'ils représentent des rotations. Puisque $\rho(\mathrm{a} + \mathrm{b}) = \rho(\mathrm{a})\,\rho(\mathrm{b})$, $\rho^2(\pi/2) = -1$, et donc $\rho(\pi/2) = [-1]^{1/2}$. Calculons $\rho(3\pi/2) = \rho(\pi + \pi/2) = \rho(\pi)\,\rho(\pi/2) = -1i = -i$. La convention suivante a le mérite de la clarté : un nombre pouvant avoir *a priori* n racines, il convient d'utiliser un symbole désignant celle dont la détermination angulaire est positive et minimale. Par cette convention, racine de 4 par exemple, $\sqrt{4}$, vaut $+2$.

On peut alors convenir d'écrire v sous l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} v = x\, e_1 + y\, e_2 &= x\rho(0) e_1 + y\rho(\pi/2)\, e_1 \\ &= (x\rho(0) + y\rho(\pi/2))\, e_1 \\ &= (x + yi)\, e_1 = z\, e_1. \end{aligned}$$

Définition 5. $z = x\rho(0) + y\rho(\pi/2) = x + y\, i$ est une autre *représentation* de v et sera appelée un *nombre de Chuquet-Cardan*.

Nota bene : Nicolas Chuquet en 1484, suivi plus tard par Gerolimo Cardano en 1539, fut le premier à introduire l'emploi formel de $[-1]^{1/2}$. La terminologie « complexe » apparut à la fin du XVIIIe siècle : un polynôme était appelé une « quantité complexe ». Par analogie, $x + iy$ fut plus tard nommé un nombre complexe (Gauss, 1834). Cette terminologie fait croire aux jeunes élèves et étudiants qu'ils abordent des notions très complexes et difficiles, et peut les détourner des mathématiques. Je suggère d'éviter l'emploi de cette terminologie, de lui préférer une autre si proche des faits historiques, et de ce fait combien plus attractive. Dans [2], j'ai, faute de mieux, conservé pour x la dénomination de partie scalaire de z, et appelé $y\, i$ sa partie rotationnelle.

Les généralisations des nombres de Chuquet-Cardan sont bien connues (Hamilton, Cayley, Clifford, Elie Cartan). Les unités i_j qu'ils ont introduites représentent les générateurs de groupes de rotations. L'analyse profonde de ces généralisations, faite par Clifford, a mis en évidence la présence de leur structure périodique ; elle a été traduite en termes topologiques par Frank Adams et Raoul Bott.

Nous allons maintenant étendre la représentation de Bernoulli-Euler d'un vecteur bidimensionnel au cas général. Un vecteur $v \in \mathbb{K}^n = \mathbf{V}^n$ est alors défini par :

- le rayon 0Π où l'affixe Π est un point de la sphère $\mathbf{S}^{n-1}$;
- son module μ associé à une métrique définie sur $\mathbf{V}^n$.

Le couple $(\mu, \Pi) \in \mathbf{P} \times \mathbf{S}^{n-1}$ peut être interprété comme une représentation de la similitude s qui transforme e_1 en v.

Le point Π peut être défini sur la sphère $\mathbf{S}^{n-1}$ par $n - 1$ angles θ_i qui généralisent les notions de latitude et de longitude sur la 2-sphère.

Mais notons tout d'abord l'identification de la sphère $\mathbf{S}^1$ avec le 1-tore $\mathbf{T}^1$. Le tore est ici défini par son *revêtement universel*. Quand l'argument appartient à l'intervalle $[0, 2\pi]$, on obtient la *détermination principale* du tore.

Plus généralement, on considérera $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbf{T}^1 \times \mathbf{T}^1 = \mathbf{T}^2$, etc., et l'identification de $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_{n-1}) \in \mathbf{T}^{n-1}$ au point $\Pi(\theta)$ de $\mathbf{S}^{n-1}$ à travers l'application différentiable Π définie par :

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_{n-1}) \mapsto \Pi(\theta) = (\cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-1}, \sin\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-1}, \sin\theta_2 \cos\theta_3 \ldots \cos\theta_{n-1}, \ldots, \sin\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1}, \sin\theta_{n-1}).$$

(Prenons par exemple $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\Pi_1(\theta) &= x_1 = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 \cos\theta_4 \\
\Pi_2(\theta) &= x_2 = \sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 \cos\theta_4 \\
\Pi_3(\theta) &= x_3 = \sin\theta_2 \cos\theta_3 \cos\theta_4 \\
\Pi_4(\theta) &= x_4 = \sin\theta_3 \cos\theta_4 \\
\Pi_5(\theta) &= x_5 = \sin\theta_4
\end{aligned}$$

et par suite :

$$\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 &= [\cos\theta_2 \cos\theta_3 \cos\theta_4]^2 \\
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= [\cos\theta_3 \cos\theta_4]^2 \\
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= [\cos\theta_4]^2 \\
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 &= 1.)
\end{aligned}$$

Définition 6. On dira que $\mathbf{T}^{n-1}$ est un *repère canonique torique* pour l'espace vectoriel $\mathbf{V}$, que (μ, θ) est une représentation ou le *nombre torique* ou *angulaire* du vecteur v, tandis que $(\mu, \Pi(\theta))$ en est sa représentation *sphérique* ou *polaire* ou encore son *nombre eulérien*.

Remarque 1. Généralisation de la construction de Hopf. Cette application montre immédiatement les constructions topologiques à la Hopf de sphères à partir de tores. Par exemple prenons trois tores : $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbf{T}^2$, $(\theta_2, \theta_3) \in \mathbf{T}^2$ et $(\theta_2, \theta_3, \theta_4) \in \mathbf{T}^3$. Alors l'identification des deux premiers le long de θ_2 pour chaque valeur de θ_1 et de θ_3 donne naissance à $\mathbf{S}^3$, alors qu'une identification analogue du premier et du troisième le long de θ_2 pour tous les autres arguments engendrera $\mathbf{S}^4$.

Remarque 2. L'intérêt de cette représentation. Nous sommes maintenant familiers d'objets physiques, possédant des propriétés non seulement fixées mais également périodiques, et respectivement caractérisées par des scalaires et des fréquences. C'est le cas, comme parfois en hydrodynamique ou dans certains systèmes chimiques, de toutes les particules et objets possédant une masse, une charge, etc., et connaissant des mouvements périodiques (rotations, oscillations). La représentation présente est adaptée à cette réalité.

Remarque 3. On peut penser à d'autres généralisations sous la forme en particulier de produits de corps. Comme l'écrivait Hermann Weyl, il revient à chaque utilisateur de créer son propre ensemble de nombres selon la réalité qu'il souhaite modéliser.

Définition 7. Étant donnés deux vecteurs $v = (\mu, \theta)$ et $v' = (\mu', \theta')$, le vecteur

$$w = v \times v' = (\mu, \theta) \times (\mu', \theta') = (\mu\mu', \theta + \theta')$$

où $\theta + \theta' = (\ldots, \theta_i + \theta'_I, \ldots)$ sera appelé le *produit eulérien* de v et de v'.

Le vecteur $v^{-1} = (1/\mu\theta)$ est l'*inverse* de v, tandis que le vecteur $\underline{v} = (\mu - \theta)$ est son *conjugué*.

On peut introduire la *somme torique* formelle de v et de v' comme l'expression :

$$v \,\&\, v' = (\mu, \theta) \,\&\, (\mu', \theta') = (\mu + \mu', \theta + \theta').$$

Posant $\mu + \mu' = k'_\mu \mu$, cette somme peut être comprise du point de vue géométrique comme le résultat d'une similitude induite par v' sur v (ou par v sur v'). Puisque, jusqu'à présent, cette somme ne semble pas avoir d'interprétation physique, je prendrai seulement en considération la « somme vectorielle » classique de deux vecteurs issue de la mécanique. Les deux notions coïncident lorsque $\mathbf{V} = \mathbb{K}$.

L'action de $v = (\mu, \theta)$ sur e_1 induit une similitude. Un autre produit entre deux vecteurs peut être introduit, lié à l'aspect fonctionnel de la similitude opérant de manière plus. Soit I l'affixe de $e_1, \Pi(\theta)$ celle de v. Alors $\rho(\theta)$ est la rotation de $\mathbf{SO}(n)$ qui transporte I en $\Pi(\theta)$, de sorte que v peut être représenté par $(\mu, \rho(\theta))$, donnant naissance au groupe multiplicatif non commutatif $\mathbf{P} \times \mathbf{SO}(n)$.

Définition 8. $(\mu, \rho(\theta))$ sera appelé la *représentation* ou le *nombre par similitude* de v, et $v \circ v' = (\mu\mu', \rho(\theta)\rho(\theta'))$ sera appelé le *produit par similitude* des deux vecteurs.

Quand $n = 2$, le nombre angulaire eulérien et le nombre par similitude coïncident.

Étant donné un vecteur v, nous pouvons maintenant lui donner deux interprétations :

- l'une statique en tant que force et permettant d'effectuer des sommes ;
- l'autre dynamique en tant que similitude permettant d'effectuer des produits.

$\mathbf{V}^n$ équipé de la somme possède la structure usuelle de groupe commutatif, alors que $\mathbf{V}^n - \{\underline{0}\}$ ($\underline{0}$ est le vecteur nul), équipé du produit eulérien ou du produit par similitude, possède également la structure

de groupe. Alors $\mathbf{V}^n$ a la structure de corps puisque dans les deux cas l'opération de distributivité fait sens :

$$a \circ (v + v') = a \circ v + a \circ v'$$
$$a \times (v + v') = a \times v + a \times v'.$$

Définition 9. $\mathbf{V}^n$ équipé du produit eulérien (resp. du produit par similitude) sera appelé un *n-corps eulérien* (resp. un *n-corps par similitude*).

III Le théorème fondamental de l'algèbre

III.1 Le cas d'un *n*-corps par similitude

Dans ce cas, étant donnée la définition de la multiplication de deux vecteurs, la notion de polynôme de degré m en $v \in \mathbf{V}$ est trivialement définie :

$$\mathrm{P}_m(v) = a_0 + a_1 v + \ldots + a_m v^m \ (a_m \neq \underline{0}).$$

Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ce polynôme $\mathrm{P}_m(v)$ a n lignes de polynômes

$$\mathrm{P}_{m,i}(v) = a_{0,i} + a_{1,i} v_i + \ldots + a_{m,i} v_i^m$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$ de sorte que, selon le théorème fondamental de l'algèbre usuel appliqué à chaque ligne polynomiale, l'équation

$$\mathrm{P}_m(v) = \underline{0}$$

possède au plus mn solutions réelles : elles peuvent être approchées en utilisant l'algorithme de Newton-Kalantari [5], et peuvent donner naissance en toute dimension à des visualisations esthétiques appelées « polynomiographes » [4].

Suggéré par la considération du paragraphe suivant, voici le principe d'un algorithme peut-être nouveau pour résoudre l'équation

$$\mathrm{P}_m(v) = a_0 + a_1 v + \ldots + a_m v^m \text{ quand } v \text{ est unidimensionnel.}$$

Écrivons $\mathrm{P}_m(v)$ sous la forme :

$$\mathrm{P}_m(v) = a_0 + v[a_1 + v[a_2 \ldots + v[a_{m-1} + a_m v] \ldots]].$$

Soit v_{00} une valeur de v pour laquelle $\mathrm{P}_m(v_0)$ n'est pas nul. Soit v_{10} la valeur de v pour laquelle

$$0 = a_0 + v_{10}[a_1 + v_{00}[a_2 \ldots + v_{00}[a_{m-1} + a_m v_{00}] \ldots]]$$

et plus généralement soit v_{1i} la valeur de v pour laquelle :

$$0 = a_0 + v_{1i}[a_1 + v_{0i-1}[a_2 \ldots + v_{0i-1}[a_{m-1} + a_m v_{0i-1}] \ldots]]$$

où $v_{0i-1} = (v_{0i-2} + v_{1i-2})/2$.

Conjecture. *Si toutes les racines de $P_m(v)$ sont réelles, v_{1i} converge vers une telle racine quand i tend vers l'infini.*

III.2 La signification géométrique du théorème fondamental de l'algèbre usuel et son extension aux corps eulériens et par similitude

Compris comme un résultat sur l'existence de solutions numériques d'une équation polynomiale, ce théorème fut conjecturé par le mathématicien français Girard vers les années 1620. Il se rapporte aux polynômes définis sur les corps bidimensionnels eulériens ou par similitude – comme on l'a déjà noté, les deux notions coïncident quand $n = 2$. Du point de vue géométrique, il peut être énoncé ainsi :

Théorème 1. *Soient $a_0, a_1, \ldots, a_m$ m vecteurs d'un 2-plan V. Il existe une similitude représentée par le vecteur v telle que le vecteur nul $\underline{0}$ est le* barycentre *des a_i affectés des poids v^i :*

$$a_0 v^0 + a_1 v + \ldots + a_m v^m = \underline{0}.$$

Prenons le cas le plus simple de deux vecteurs a_0 et a_1 du plan : il existe alors une similitude représentée par v qui transporte a_1 sur l'opposé de a_0 (voir la figure 3).

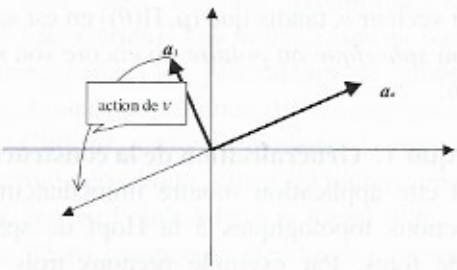


Figure 3. Illustration de la relation $a_0 + a_1 v = \underline{0}$.

Quand $a_0, a_1, \ldots, a_m$ sont m vecteurs du plan ayant le même module, l'angle $\alpha_{i+1,i} = 2\pi/m + 1$ entre deux vecteurs quelconques a_{i+1} et a_i étant constant, leurs affixes définissent un polygone régulier R de sorte que $a_0 + a_1 + \ldots + a_m = \underline{0}$. Soit $v = s_{i+1,i} = (\mathrm{x}, \alpha_{i+1,i})$ $(i = m-1, m-2, \ldots, 1, 0)$ la similitude (constante) qui envoie a_{i+1} sur a_i. Alors $\mathrm{P}_m(v) = a_0 v^0 + a_1 v + \ldots + a_m v^m = \underline{0}$.

Le théorème énonce que la propriété pour $\underline{0}$ d'être le barycentre des a_i est *invariante* par toute déformation de ces vecteurs. Ce théorème peut être énoncé de la manière suivante sans restriction sur la dimension de $\mathbf{V}^n = \mathbf{V}$ pour autant que $n \geq 2$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

Théorème 2. *Toute application différentiable φ : $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ telle que $\varphi(a_i) = a'_i$ induit une application*

différentiable associée $\Phi_\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *où* $\Phi_\varphi(v) = v'$ *est tel que :*

$$\mathrm{P}_m(v') = a'_0 v'^0 + a'_1 v' + \ldots + a'_m v'^m = \underline{0}.$$

Dans le cas de la dimension 2, on peut procéder à une analyse étape par étape de l'effet d'une modification de l'un des a_i sur v. Mais étant donné le degré de généralité auquel on souhaite parvenir, il convient de donner une preuve globale et synthétique.

Le principe de démonstration employé par Milnor [6] lorsque $n = 2$ répond à cette attente. Le fait que soit différente la définition du produit de deux vecteurs n'affecte en rien les principales propriétés du polynôme : sa différentiabilité, le calcul formel de ses dérivées. De sorte qu'il n'est pas nécessaire d'introduire des modifications dans cette preuve, sauf à propos des valeurs de la dimension : on emploie n au lieu de 2.

Comme conséquence immédiate de ce théorème général, les notions et outils standards de la géométrie algébrique, comme par exemple la transformation rationnelle et sa décomposition en homographies, peuvent être étendus aux n-corps que l'on vient de définir. On peut alors espérer la découverte d'objets mathématiques nouveaux et plus riches.

Appendice A. Preuve du Théorème 2

On peut par exemple penser ici à $\mathbf{V}^n$ en tant que n-corps eulérien muni de la métrique euclidienne. Alors comme dans le cas standard, pour $z = (z_1, \ldots, z_n) = (\mu_z, \theta_z)$, $z\underline{z} = (\mu_z^2, 0) = \sum z_i^2$.

Soit $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ la représentation standard d'un élément Π de la n-sphère $\mathbf{S}^n$ dans $\mathbf{V}^n$, $\mathrm{N} = (0, \ldots, 0, 1)$ son pôle « nord », $\mathrm{S} = (0, \ldots, 0, -1)$ son pôle « sud », et

$$h_\mathrm{N} : \mathbf{S}^n - \{\mathrm{N}\} \to \mathrm{K}^n \times \{0\}.$$

La projection stéréographique standard h_N de la sphère, à partir du pôle nord, sur $\mathbb{K}^n$ identifié à l'hyperplan $\mathbb{K}^n \times \{0\}$ of $\mathbb{K}^{n+1}$, est telle que :

$$h_\mathrm{N}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = v = (v_1, \ldots, v_n) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right).$$

h_N est une application différentiable (*i.e.* lisse) et injective.

L'application polynomiale différentiable $\mathrm{P}_m : v \mapsto \mathrm{P}_m(v) = w$ de $\mathbb{K}^n$ dans lui-même induit l'application f de la sphère sur elle-même définie par :

$$f(\mathrm{N}) = \mathrm{N},$$
$$f(\Pi) = h_\mathrm{N}^{-1}\, \mathrm{P}_m\, h_\mathrm{N}(\Pi) = \Pi' \quad \text{pour} \quad \Pi \neq \mathrm{N}$$

f est différentiable sur un voisinage de N.

On utilise maintenant la théorie du degré, dont le principe est rappelé dans l'appendice B. Les points critiques de f sont ceux de P_m pour lesquels sa dérivée, un polynôme de degré $m - 1$, est le vecteur nul $\underline{0}$. Par une hypothèse de récurrence, il existe une quantité dénombrable de vecteurs v^c pour lesquels cette dérivée s'annule, et par conséquent, il existe une quantité dénombrable de points Π^c sur la sphère pour lesquels f n'est pas régulière. La sphère étant connexe, il en est de même de l'ensemble Σ des valeurs régulières Π' de f. La sphère étant compacte, le cardinal de la contre-image $f^{-1}(\Pi')$ est constant sur cet ensemble. Puisqu'il ne peut être nul partout, étant constant, il n'est jamais nul, et f est une application surjective : il existe donc un point Π_P sur la sphère pour lequel $f(\Pi_\mathrm{P}) = v_\mathrm{P}$ et $\mathrm{P}_m(v_\mathrm{P}) = \underline{0}$.

Appendice B. La théorie du degré dans son principe

Cette théorie simple dans son principe remonte à Kronecker. Prenez la parabole standard $x \mapsto x^2 = f(x) = y$. Elle admet une singularité à l'origine ($f'(0) = 0$). Coupez cette parabole par une (droite) transversale parallèle à l'axe horizontal et située à la hauteur y : les abscisses des points d'intersection P et $-$P sont $\underline{x}$ et $-\underline{x}.\underline{x}$ et $-\underline{x}$ sont les éléments de la contre-image $f^{-1}(y)$ de y. En $\underline{x}$ et sur un petit ouvert $\mathrm{U}_{\underline{x}}$ contenant $\underline{x}$, la dérivée de f, appelée sa jacobienne, prend une valeur par exemple positive ; cette valeur est alors négative en $-\underline{x}$ et sur un petit ouvert $\mathrm{U}_{-\underline{x}}$ ayant la même orientation que l'ouvert précédent. On affecte le poids $+1$ (respectivement le poids -1) aux éléments de la contre-image associés à la jacobienne positive (resp. négative), et l'on fait la somme de ces poids ; cette somme est appelée le *degré* de l'application f.

Dans le cas présent ce degré est nul en y : il est partout défini en dehors de la singularité, et il reste constant pour tout valeur positive de y.

Remarquez qu'en déformant par homotopie la parabole, par exemple en la déformant en la parabole $y = 2\,x^2$, le degré ne change pas.

Ces constances du degré sont établies pour toute application différentiable $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ où V et W sont deux variétés orientées, la première compacte, la seconde connexe, le degré de f en $y \in \mathrm{W}$ étant, rappelons-le, la somme des poids $+1$ et -1 affectés aux signes de la jacobienne $\mathrm{J}_x(f)$ de f lorsque x parcourt la contre-image $f^1(y)[\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mathrm{J}_x(f)]$.

Un exemple classique, plus intéressant que celui par lequel nous avons débuté cet appendice, est celui de l'application f sur $\mathbf{S}^1$ de $\mathbf{S}^1$, cette dernière obtenue par n enroulements uniformes de cette sphère sur elle-même : le degré de f est n.

Références

[1] C.P. Bruter, « Sur la construction des nombres », *Zestyty Naukowe Uniw. Jagiellonskiego* **17** (1975) 25–32.

[2] C.P. Bruter, *La Construction des Nombres, Histoire et Épistémologie*, Ellipses, Paris, 2000.

[3] C.P. Bruter, « La fabrique des nombres », *Sciences et Avenir*, Hors-série M02597-138 (2004) 20–26.

[4] B. Kalantari, « Polynomiography and application in art, education, and science », *Comput. Graph.* **28** (2004) 417–430.

[5] B. Kalantari, « An infinite family of bounds on zeros of analytic functions and relationship to Smale's bounds », *Math. Comp.* **74** (2005) 841–852.

[6] J. Milnor, *Topology from the Differential Viewpoint*, Princeton University Press, Princeton, 1997.

* *